

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
21 februarie 2016
CLASA a VII-a

1. a) (4p) Numerele naturale $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ sunt invers proporționale cu numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2016}$ și

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2015} = 2016^2. \text{ Calculați suma } S = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2015} \cdot a_{2016}}.$$

b) (3p) Se dă șirul de numere raționale: $\frac{n^2-1}{n}, n, \frac{n^2+1}{n}, \frac{n^2+2}{n}, \dots$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați suma primilor n termeni ai șirului.

2. a) (3p) Determinați valorile reale ale lui x pentru care:

$$\frac{\sqrt{2^{1980} - 2^{1979} - \dots - 2^{1002}} + \sqrt{4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{999}}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{32^{200}(x^2 - 1)}.$$

b) (4p) Să se determine numerele naturale scrise în baza 10 cu proprietatea că fiecare este de 47 de ori mai mare decât suma cifrelor sale.

3. Se consideră patrulaterul convex ABCD cu $AB \parallel CD$ și un punct M interior lui prin care se construiesc paralelele $MP \parallel AB$ și $BQ \parallel AM$. Se știe că aria patrulaterului BMCP este jumătate din aria patrulaterului ABCD.

a) (5p) Să se arate că $[MD] \equiv [PC]$.

b) (2p) Dacă punctele B, M și D sunt coliniare, determinați poziția punctului M pe diagonala BD dacă aria triunghiului MAB este $\frac{1}{5}$ din aria patrulaterului ABCD.

4. (7p) Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$. Dacă $D \in (BA)$ și $E \in (CA)$ astfel încât $[BD] \equiv [CE] \equiv [BC]$ și $BE \cap CD = \{T\}$, arătați că patrulaterul TEID este paralelogram.

- Notă:**
- 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
 - 2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**
 - 3. Timp de lucru 3 ore.**